

# **Introduction à la capillarité**

S. Chevalier – Document débuté le 03 Avril 2014

# 1 Dynamique d'imprégnation dans un capillaire

## 1.1 Contexte de l'étude

Nous considérons le cas d'un capillaire vertical sec qui est mis en contact avec un réservoir de liquide mouillant. Sous l'effet de la pression capillaire, le fluide mouillant envahit le capillaire. Nous allons définir ici l'évolution de la hauteur de la colonne d'eau en fonction du temps.

Celle-ci est soumise à trois forces :

1. la force capillaire :  $\vec{F} = 2.\pi.R.\gamma.\cos(\theta_E).\vec{z}$
2. son poids :  $\vec{P} = -m_{liq}.g.\vec{z}$
3. la force de friction visqueuse sur les parois du capillaire :  $\vec{F}_\eta = -8.\pi.\eta.z.\vec{V}$ , où  $V$  est la vitesse moyenne de l'évolution de la hauteur d'eau. Le calcul de cette force est détaillé en annexe.

L'équation du mouvement de la hauteur d'eau s'écrit à partir du principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d(m_{liq}.\vec{V})}{dt} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_\eta \quad (1)$$

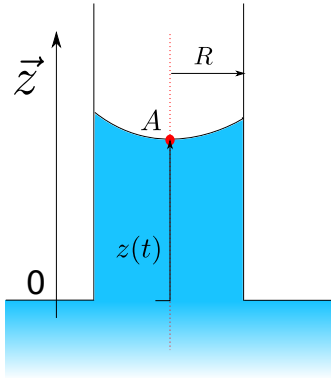


FIGURE 1 – Capillaire en contact avec un fluide mouillant

## 1.2 Résolution du problème général

L'équation 1 est projetée sur l'axe  $\vec{z}$  et les expressions des différentes forces sont développées. La masse d'eau liquide est exprimée en fonction de la hauteur d'eau  $m_{liq} = \rho_{liq}.\pi.R^2.z(t)$ .

$$\frac{d}{dt} (\rho_{liq}.\pi.R^2.z.V) = 2.\pi.R.\gamma.\cos(\theta_E) - \rho_{liq}.\pi.R^2.z.g - 8.\pi.\eta.z.V \quad (2)$$

Avec la vitesse moyenne  $V = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$ . Après développement, nous obtenons l'équation différentielle

non linéaire suivante qui régit l'évolution de la hauteur d'eau dans le capillaire en fonction du temps :

$$\dot{z}^2 + z.\ddot{z} = \frac{2.\gamma.\cos(\theta_E)}{\rho.R} - \frac{8.\eta}{\rho.R^2}.z.\dot{z} - z.g \quad (3)$$

Cette équation est résolue numériquement via Matlab®. Afin de pouvoir analyser les résultats obtenus et les comparer à quelques modèles de références, nous définissons les grandeurs suivantes :

- le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho.R.V}{\eta}$  qui compare les forces inertielles aux forces visqueuses.
- le nombre capillaire  $Ca = \frac{\eta.V}{\gamma}$  qui compare les forces visqueuses aux forces capillaire.
- la longueur capillaire  $\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho.g}}$ , exprimée en mètre, elle indique la distance au delà de laquelle l'effet de la gravité devient non négligeable.

## 1.3 Solutions analytiques dans quelques cas particulier

### 1.3.1 Modèle de Washburn

Ce modèle est valide lors d'une imprégnation à faible vitesse et à bas nombre de Reynolds ( $Re < 1$ ). Le régime inertiel peut donc être négligé  $\frac{d(m.V)}{dt} \approx 0$ . Ce modèle est généralement utilisé pour les fluides très visqueux type huile possédant un nombre capillaire élevé  $Ca > 0,1$ . De plus, le poids de la colonne de liquide est également négligé, ce qui implique une validité pour une imprégnation horizontale ou alors inférieur à la longueur capillaire  $z > \kappa^{-1}$ . Le modèle de Washburn se réduit donc aux équations suivantes :

$$F = F_\eta \quad (4)$$

$$2.\pi.R.\gamma.\cos(\theta_E) = 8.\pi.\eta.z.\dot{z} \quad (5)$$

Tous calculs fait, nous aboutissons à la loi suivante, en supposant  $z(0) = 0$  :

$$z_w(t) = \sqrt{\frac{R.\gamma.\cos(\theta_E).t}{2.\eta}} \quad (6)$$

### 1.3.2 Modèle inertiel

Ce modèle intervient au premiers instants de l'imprégnation du liquide, c'est-à-dire  $z \rightarrow 0$ . En appliquant cette hypothèse, l'équation 3 devient :

$$\dot{z}^2 = \frac{2.\gamma.\cos(\theta_E)}{\rho.R} \quad (7)$$

Ce qui permet de déduire l'évolution de la hauteur de liquide dans les premiers instants :

$$z_i(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot \cos(\theta_E)}{\rho \cdot R}} \cdot t \quad (8)$$

A noter que le régime hydrodynamique est complètement différent par rapport au modèle de Washburn, nous avons dans le cas inertiel une vitesse constante alors que le modèle de Washburn prévoit une diminution de la vitesse au fil du temps ( $\dot{z}_w \sim t^{-\frac{1}{2}}$ ).

### 1.3.3 Hauteur maximale de fluide

Lorsque le fluide a atteint sa hauteur maximale, c'est-à-dire au temps long l'évolution de  $z(t)$  se stabilise autour d'une valeur constante. L'équation 3 peut alors se simplifier et nous obtenons la relation suivante :

$$z_f = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \cos(\theta_E)}{\rho \cdot R \cdot g} = H_j \quad (9)$$

Nous retrouvons alors la hauteur de Jurin pour un tube où les forces de pesanteur de capillarité se compensent exactement.

## 1.4 Résultats

Pour illustrer les résultats théoriques précédents, nous considérons les dynamiques d'imprégnation de deux fluides différents : le PDMS et l'eau. Leurs caractéristiques sont données dans le tableau 1. Tout d'abord les figures 2 à 4 présentent l'évolution de la hauteur de liquide pour le PDMS. Sur la figure 2 est représentée l'évolution des hauteurs de fluide calculées à partir du modèle général (eq. 3) et du modèle de Washburn. Le PDMS met plus d'une dizaine de secondes à atteindre sa hauteur maximale. Dans les premiers instants, la hauteur de fluide augmente très rapidement avant de tendre asymptotiquement vers la hauteur de Jurin.

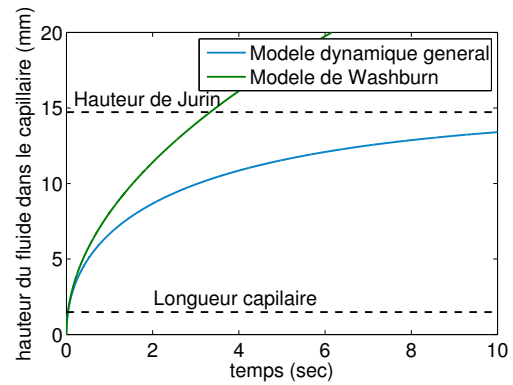


FIGURE 2 – Évolution de la hauteur de PDMS dans un capillaire sur une large gamme de temps.

Le modèle de Washburn quant à lui diverge très rapidement après quelques secondes. Le poids de la colonne d'eau n'étant pas pris en compte, la hauteur de fluide ne se stabilise pas et dépasse la valeur maximale théorique. Néanmoins, si l'on s'intéresse aux premiers instants (figure 3), lorsque la hauteur  $z(t)$  est inférieure à la longueur capillaire, on remarque que le modèle de Washburn approche très bien le modèle dynamique général. En revanche, ce n'est pas le cas pour le modèle inertiel. Ceci est dû en partie à la valeur du nombre de Reynolds pour le PDMS, c.f. figure 4. En effet, celui-ci est de l'ordre de 0,1 aux premiers instants, les forces visqueuses sont donc supérieures aux forces inertielles ce qui invalide une des hypothèses au modèle inertiel.

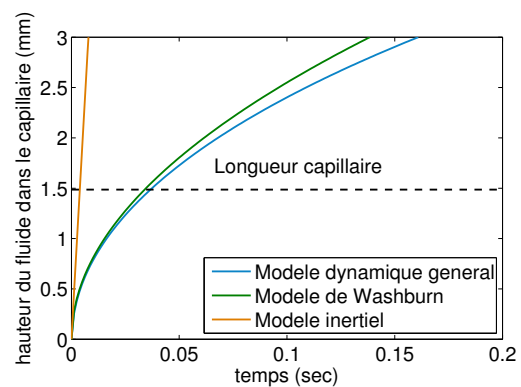


FIGURE 3 – Évolution de la hauteur de PDMS dans un capillaire sur une gamme de temps réduite.

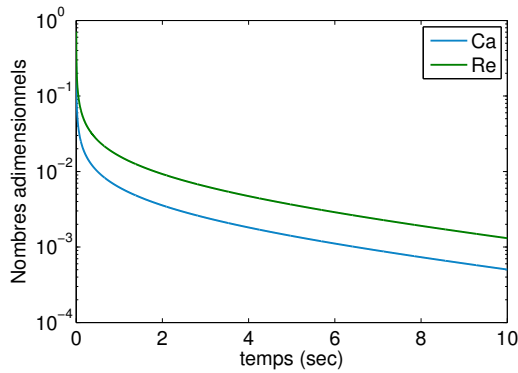


FIGURE 4 – Évolution des nombres de Reynolds et Capillaire en fonction du temps

Les figures 5 à 7 présentent l'évolution de la hauteur de liquide pour de l'eau à 20°C. Comme nous pouvons le remarquer dans le tableau 1, l'eau est 50 fois moins visqueuses que le PDMS et sa tension superficielle est 3,5 fois plus élevée. Ceci explique donc qu'elle atteigne la hauteur de Jurin beaucoup plus rapidement : environ une seconde.

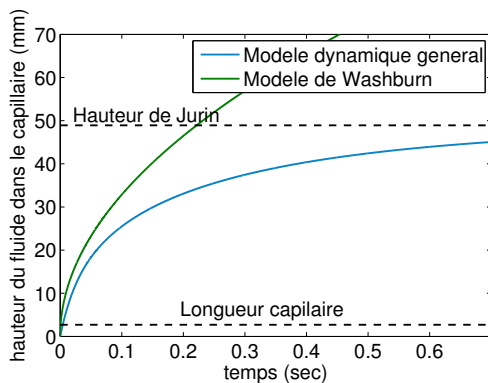


FIGURE 5 – Évolution de la hauteur d'eau dans un capillaire sur une large gamme de temps.

Si on s'intéresse encore une fois aux premiers instants de l'imprégnation du capillaire (figure 6), nous remarquons que le modèle inertiel approche bien le modèle général alors que celui de Washburn diverge nettement même si la hauteur de fluide est inférieure à la longueur capillaire.

de l'eau le nombre de Reynolds est de l'ordre de 100 ce qui signifie que les forces inertielles prédominent dans le cas de l'imprégnation d'un capillaire par de l'eau.

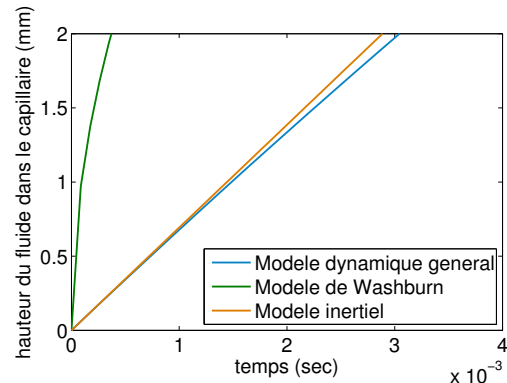


FIGURE 6 – Évolution de la hauteur d'eau dans un capillaire sur une gamme de temps réduite.

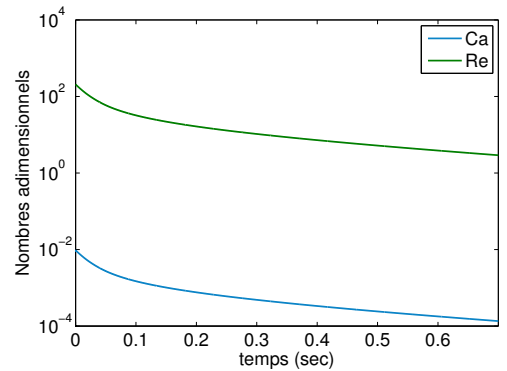


FIGURE 7 – Évolution des nombres de Reynolds et Capillaire en fonction du temps

Pour conclure cette étude, le modèle général développé par l'équation 3 permet de décrire l'évolution de la hauteur de fluide lors de l'imprégnation d'un capillaire vertical, depuis sa base ( $z(t) = 0$  jusqu'à la hauteur de Jurin. Cette équation non linéaire nécessite une résolution numérique, mais quelques solutions analytiques peuvent être obtenues dans certains cas particuliers :

Fluide	$\eta$ (mPa.s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma$ (mN/m)	$\theta_E$ (rad)	$\kappa^{-1}$ (mm)	$H_j$ (mm)
Eau	1	1000	72	0	2,71	48,9
PDMS	48	960	20,8	0	1.49	14,7

TABLE 1 – Caractéristiques des fluides issues de [2]. Le rayon du tube capillaire est de 300  $\mu$ m

L'explication se trouve sur la figure 7, dans le cas

- Le modèle de Washburn pour les fluides visqueux dans les tubes de longueur inférieure à la longueur capillaire. Ou alors dans le cas d'un capillaire horizontal ce qui permet de s'affranchir de la gravité.
- Le modèle inertiel pour les fluides peu visqueux ayant des vitesses d'imprégnation élevée. Son domaine de validité est néanmoins restreint à une hauteur de fluide très inférieure à la longueur capillaire.

## 2 Annexes : Calcul de la force visqueuse

Nous calculons la force visqueuse qui s'exerce sur les parois d'un tube lors d'un écoulement à faible vitesse, type Poiseuille. Nous allons chercher à exprimer cette force en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement  $V_{moy}$ .

La figure 8 présente le profil de vitesse dans un tube de rayon  $R$ .

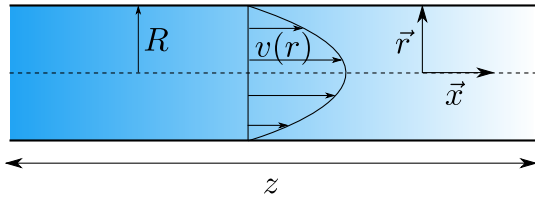


FIGURE 8 – Profil de vitesse d'un fluide s'écoulant dans un tube de rayon  $R$

Les hypothèses d'un écoulement de Poiseuille sont les suivantes :

- écoulement à faible nombre de Reynolds
- écoulement établi
- fluide incompressible

Dans ces conditions, l'écoulement dans le tube est de type Stokes, il s'écrit en axisymétrique [1] :

$$\eta \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{dp}{dx} = \alpha \quad (10)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$v(R) = 0 \quad (11)$$

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_0 = 0 \quad (12)$$

Ce qui correspond à une condition de non glissement à la paroi (eq. 11) et une vitesse maximale au centre

du tube ( $r = 0$ ) (eq. 12). Tous calculs faits, nous obtenons le profil de vitesse suivant :

$$v(r) = \frac{\alpha \cdot R}{4 \cdot \eta} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (13)$$

La vitesse maximale est  $V_{max} = \frac{\alpha \cdot R}{4 \cdot \eta}$ . Le calcul de la vitesse moyenne se fait comme suit :

$$V_{moy} = \frac{Q}{S} \quad (14)$$

Avec  $S$  la section de passage du fluide et  $Q$  le débit de fluide, il est donnée par l'expression suivante :

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (15)$$

$$= 2\pi \frac{\alpha \cdot R}{4 \cdot \eta} \int_0^R \left( r - \frac{r^3}{R^2} \right) \cdot dr \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot V_{max} \quad (17)$$

D'où la vitesse moyenne :

$$V_{moy} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot V_{max}}{2 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{V_{max}}{2} \quad (18)$$

Finalement, la force visqueuse sur la paroi peut s'exprimer à partir de la contrainte de cisaillement à la paroi :

$$F_\eta = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot z \cdot \tau_p(R) \quad (19)$$

Où  $2 \cdot \pi \cdot R \cdot z$  est la surface extérieure d'un tube de longueur  $z$  et  $\tau_p$  la contrainte de cisaillement exprimée par :

$$\tau_p(r) = \eta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = 4 \cdot \eta \cdot V_{moy} \cdot \frac{r}{R^2} \quad (20)$$

D'où en combinant les équations 19 et 20 :

$$F_\eta = 8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot V_{moy} \cdot z \quad (21)$$

La force visqueuse sera d'autant plus importante que la vitesse est importante. Elle est également proportionnelle à la longueur  $z$  du tube. Cette expression est utilisée dans les calculs de la dynamique d'imprégnation de capillaire.

## Références

- [1] *Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours*. Collection Polytech, 2000.
- [2] *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Edition Belin, 2005.